Osječki matematički list 14 (2014), 69-75

Jedna nejednakost između sredina, njeno poboljšanje i primjena u geometriji

Šefket Arslanagić*

Sažetak

U radu se daje dokaz jedne nove nejednakosti u kojoj se javljaju aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina kao i jedno njeno poboljšanje i generalizacija. Navedene su primjene te nejednakosti u geometriji trokuta.

Ključne riječi: *nejednakost između sredina, generalizacija nejednakosti, primjena u geometriji*

One inequality with means, its refinement and application in geometry

Abstract

In this paper, we give the proof of a new inequality involving means, i.e. arithmetic, geometric and harmonic, its refinements and a generalisation. Then we give a series of examples of application of this inequality in geometry of the triangle.

Keywords: *inequality with means, generalisation, application in geometry*

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, BiH – 71 000 Sarajevo, asefket@pmf.unsa.ba

1 Uvod

Definirajmo prvo osnovne sredine i navedimo nejednakosti između tih sredina. Za realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, definiramo

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} && \text{(aritmetička sredina)}\\
G &= \sqrt[n]{a_1\, a_2\, \cdots\, a_n} && \text{(geometrijska sredina)}\\
H &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} && \text{(harmonijska sredina)}\\
K &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} && \text{(kvadratna sredina).}
\end{aligned}
$$

Može se dokazati da vrijede nejednakosti

$$H \le G \le A \le K,$$

gdje znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ (pogledati [1]).

Sada ćemo dokazati jednu algebarsku nejednakost u kojoj se pojavljuju aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina triju pozitivnih realnih brojeva. Navest ćemo jedno poboljšanje te nejednakosti i njenu generalizaciju. Vrijedi sljedeće.

Za sve pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$x + y + z + \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \ge 4\sqrt[3]{xyz} \tag{1}$$

odnosno

$$3A + H \ge 4G \tag{2}$$

gdje je, kako smo već definirali,

$$A = \frac{x + y + z}{3}, \quad H = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}, \quad G = \sqrt[3]{xyz}.$$

Dokaz. Najprije ćemo dokazati jednu pomoćnu nejednakost koja glasi

$$A^2 \cdot H \ge G^3, \tag{3}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x+y+z)^2}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq (\sqrt[3]{xyz})^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x+y+z)^2}{9} \cdot \frac{3xyz}{xy+yz+zx} \geq xyz \\
\Leftrightarrow \quad & (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geq 0
\end{aligned}
$$

a ova nejednakost je očigledno točna. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$.

Dokažimo sada traženu nejednakost (1). Imamo najprije

$$x+y+z+\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 3A + H$$

odakle zbog $A \geq G$ imamo

$$A + A + A + H \geq 4\sqrt[4]{A \cdot A \cdot A \cdot H} = 4\sqrt[4]{A^3H}$$

pa prema (3), zbog $A \geq G$, dobivamo

$$4\sqrt[4]{A^3H} = 4\sqrt[4]{A(A^2H)} \geq 4\sqrt[4]{AG^3} \geq 4\sqrt[4]{G^4} = 4G.$$

Vrijedi dakle

$$x+y+z+\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq 4\sqrt[3]{xyz}$$

što je i trebalo dokazati.
Očigledno, jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$. $\square$

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1) u geometriji, koristeći neke jednakosti i nejednakosti iz [2] i [3].

Primjer 1. Neka u nejednakosti (1) x, y, z predstavljaju duljine a, b, c stranica trokuta ABC. Tada vrijede sljedeće poznate jednakosti:

$$a+b+c = 2s, \; abc = 4RP, \; ab+bc+ca = s^2+r^2+4Rr, \; P = rs,$$

gdje je P površina, s poluopseg, a R i r radijus opisane, odnosno upisane kružnice trokuta ABC.

Iz nejednakosti (1) dobivamo sada sljedeću ekvivalentnu nejednakost

$$s + \frac{6Rrs}{s^2 + r^2 + 4Rr} \geq 2\sqrt[3]{4Rrs}. \tag{4}$$

Primjer 2. Neka su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta ABC. Stavljajući u (1) α, β, γ umjesto $x, y, z, (\alpha + \beta + \gamma = \pi)$ dobivamo sljedeću nejednakost

$$\pi + \frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \geq 4\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

tj.,

$$4\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} - \frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \leq \pi. \tag{5}$$

Primjer 3. Ako su r_a, r_b, r_c radijusi pripisanih kružnica trokuta ABC tada vrijede sljedeće poznate jednakosti

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Stavljajući sada u (1) r_a, r_b, r_c umjesto x, y, z dobivamo

$$r_a + r_b + r_c + \frac{3}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \geq 4\sqrt[3]{r_a r_b r_c}$$

odnosno, $4R + r + 3r \geq 4\sqrt[3]{r_a r_b r_c}$, tj.

$$R + r \geq \sqrt[3]{r_a r_b r_c}. \tag{6}$$

Primjer 4. Uvrštavajući u (1) h_a, h_b, h_c umjesto x, y, z , gdje su h_a, h_b, h_c visine trokuta ABC dobivamo:

$$h_a + h_b + h_c + \frac{3}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} \geq 4\sqrt[3]{h_a h_b h_c}. \tag{7}$$

Iz prethodne nejednakosti, uzimajući u obzir poznate jednakosti koje povezuju spomenute elemente trokuta

$$h_a + h_b + h_c = \frac{1}{2R}(s^2 + r^2 + 4Rr), \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, h_a h_b h_c = \frac{2s^2 r^2}{R}$$

dobivamo sljedeću nejednakost

$$\frac{1}{2R}(s^2+r^2+4Rr)+3r \geq 4\sqrt[3]{\frac{2s^2r^2}{R}}$$

tj.,

$$s^2+r^2+10Rr \geq 8\sqrt[3]{2s^2r^2R^2}. \tag{8}$$

Primjer 5. Ako u (1) umjesto x, y, z uvrstimo duljine težišnica m_a, m_b, m_c trokuta ABC dobivamo nejednakost

$$m_a+m_b+m_c+\frac{3m_am_bm_c}{m_am_b+m_bm_c+m_am_c} \geq 4\sqrt[3]{m_am_bm_c}. \tag{9}$$

Primjer 6. Ako u (1) umjesto x, y, z stavimo duljine simetrala unutarnjih kutova $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ trokuta ABC dobivamo:

$$s_\alpha+s_\beta+s_\gamma+\frac{3s_\alpha s_\beta s_\gamma}{s_\gamma s_\beta+s_\beta s_\gamma+s_\alpha s_\gamma} \geq 4\sqrt[3]{s_\alpha s_\beta s_\gamma}. \tag{10}$$

Napomena 1.1. *Jednakost u* (4), (5), (6), (7), (8), (9) *i* (10) *vrijedi ako i samo ako je u pitanju jednakostraničan trokut.*

Sada ćemo dati jedno poboljšanje nejednakosti (1).

Za sve pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{8(x+y+z)}{9}+\frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq 4\sqrt[3]{xyz}. \tag{11}$$

Dokaz. Nakon množenja nejednakosti (11) s $\frac{3}{4}$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{2(x+y+z)}{3}+\frac{3}{xy+yz+xy} \geq 3\sqrt[3]{xyz}. \tag{12}$$

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine triju pozitivnih realnih brojeva $A \geq G$ imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y+z}{3}+\frac{3xyz}{xy+yz+xz}\\
&\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\cdot\frac{3xyz}{xy+yz+xz}}\\
&=3\sqrt[3]{\frac{(x+y+z)^2}{3}\cdot\frac{xyz}{xy+yz+xz}}\\
&\geq 3\sqrt[3]{xyz},
\end{aligned}$$

gdje je posljednja nejednakost dobivena korištenjem poznate nejednakost

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2] \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$. □

Pokažimo da je nejednakost (11) bolja (jača) od nejednakosti (1), tj. da je

$$\begin{aligned}
& x+y+z+\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq \frac{8}{9}(x+y+z)+\frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{9}(x+y+z) \geq \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},
\end{aligned}$$

a ovo je nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine triju pozitivnih realnih brojeva $x, y, z (A \geq H)$.

Na sličan način se dokazuje i sljedeća generalizacija nejednakosti (12), odnosno (11).

Ako su $x_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi nejednakost

$$\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \geq n\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k},$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Literatura

[1] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Bencze, M., Arslanagić, Š., *A Mathematical Problem Book*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] Bottema, O., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.